№3

Дано:

трапеция ABCD

$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$

$\frac{\angle CBD}{\angle DBA} = \frac{1}{3}$

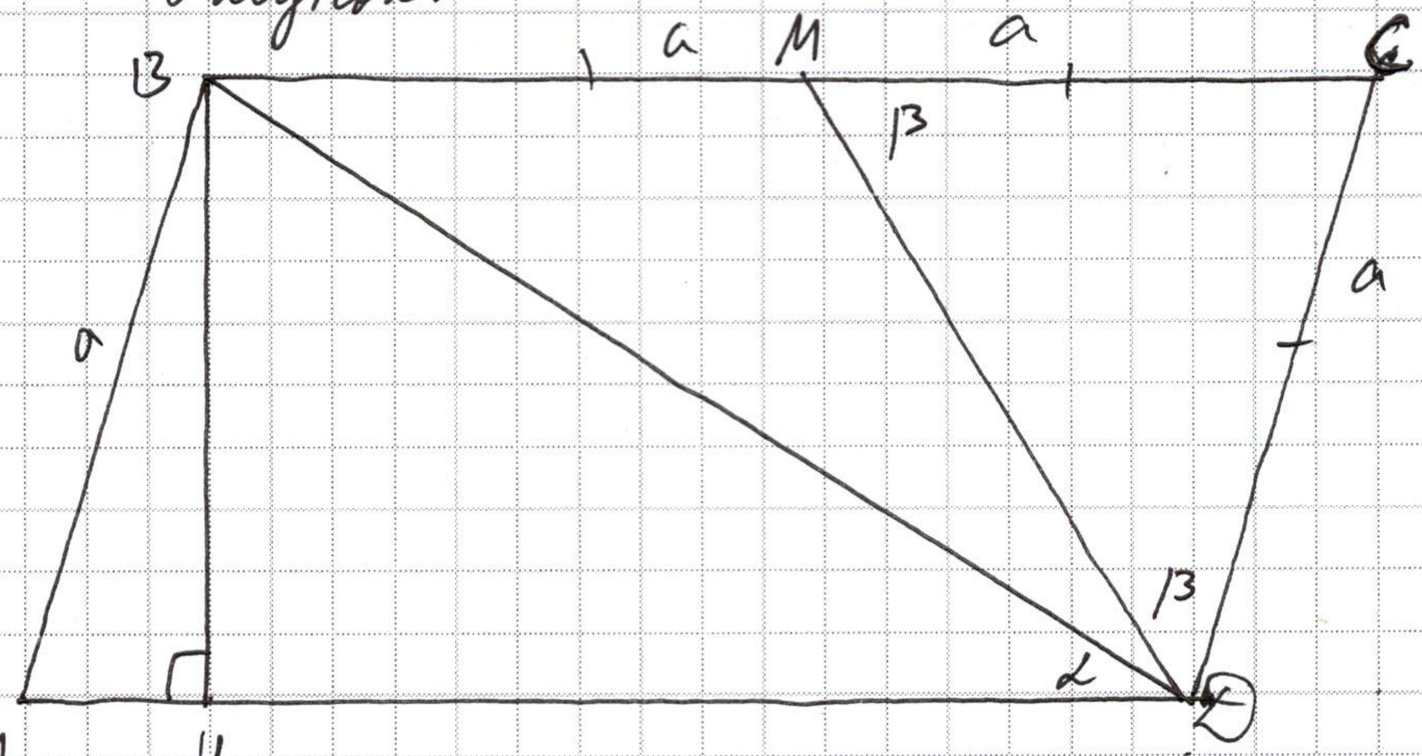
$S_{ABCD} = 10\sqrt{3}$

ABCD - параллелограмм

Найти

B_2H_2 - ?

Рисунок:



Решение:

Пусть $BC = 2a \Rightarrow AB = a$ и также $CD = AD$ (по св-ву пар-грамма) $\angle CBD = \angle BDA = \angle DBA = \alpha \Rightarrow \angle ABD = \angle CDB = 3\alpha$ (по как внутр. накр. леж. угол. при $BC \parallel AD$ и сек. BD)

Проведём отрезок DM: M - середина BC, тогда $BM = MC = a = CD \Rightarrow \triangle DMC$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle CMD = \angle CDM = \beta$. Тогда, т.к. $\angle MCD = 180° - 2\beta - 3\alpha = 180° - 4\alpha$ как внутр. односторон. угол при $BC \parallel AD$ и сек. CD, то $2\beta + 180° - 4\alpha = 180°$ по т. о сумме углов $\triangle \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\beta = 4\alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow \angle BDM = 4\alpha - \alpha - 2\alpha = \alpha$, но $\angle DBC$ также равен $\alpha \Rightarrow \triangle BMD$ - равнобедр. $\Rightarrow MD = BM = a \Rightarrow$ $\Rightarrow$ т.к. $BD = MC = CD = a$, то $\triangle MCD$ - равносторон. $\Rightarrow 2\alpha = 60° \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 30°$

Теперь выразим BH через a. Рассмотрим $\triangle ABH_1$: $\angle AH_1B = 90°$, т.к. BH_1 - высота, $\angle BAH = 180° - 4 \cdot 30° = 60°$ по св-ву пар-грамма, $\angle ABH = 30°$ по т. о сумме углов $\triangle \Rightarrow \frac{BH}{a} = \cos 60° \Rightarrow$ $\Rightarrow BH = \sin 60° \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Т.к. $S_{ABCD} = 10\sqrt{3}$, то $2a \cdot H_1B = 10\sqrt{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10}}{2} =$ $= \frac{\sqrt{30}}{2} = \sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{7,5}$

Ответ: $\sqrt{7,5}$

olymp.bmstu.ru

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 2

Лист работы 1 из 3

№1

Обозначим скорость поедания смородины Артуром, Кириллом и Машей буквами А, К, М соответственно, а объём корзины О, тогда

Тогда: $М+К = \frac{1}{10}$ О/мин, $А+К = \frac{1}{15}$ О/мин, $М+А = \frac{1}{18}$ О/мин

$\Rightarrow 2(А+М+К) = \frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18} = \frac{2}{9}$ О/мин $\Rightarrow А+М+К = \frac{1}{9}$ О/мин $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Они съедят одну корзину за 9 минут $\rightarrow$ 2 корзины — за 18 минут

Ответ: 18 минут.

№2

Выразим y через x и упростим выражение:

$(y-1)(4x+8) = 3x^2-x-14$

$y-1 = \frac{3x^2-x-14}{4x+8}$ (при условии, что $x \neq -2$).

$y = \frac{3x^2-x-14}{x+2}\cdot\frac{1}{4}+1 = \frac{3x-7}{4}+1$

$x; y \in \mathbb{Z}$, если $(3x-7) \bmod 4 = 0$, т.к. $7 \bmod 4 = 3$, то

$3x \bmod 4 = 3$ также. Т.к. $3 \bmod 4 = 3$, то $x \bmod 4 = 1$

Таким образом $x; y \in \mathbb{Z}$, если $x \in A$, $A = [a \mid \forall a \overset{a \in \mathbb{Z}}{\bmod} 4 = 1]$

Ответ: все пары $(x;y)$, где $x \bmod 4 = 1$

Можно использовать оборот листа для записи решений

№5

Дано:

прямоуг. $\square KLMN$

$\angle LAN = \alpha$

$A \in KN$

$\angle A = NA$

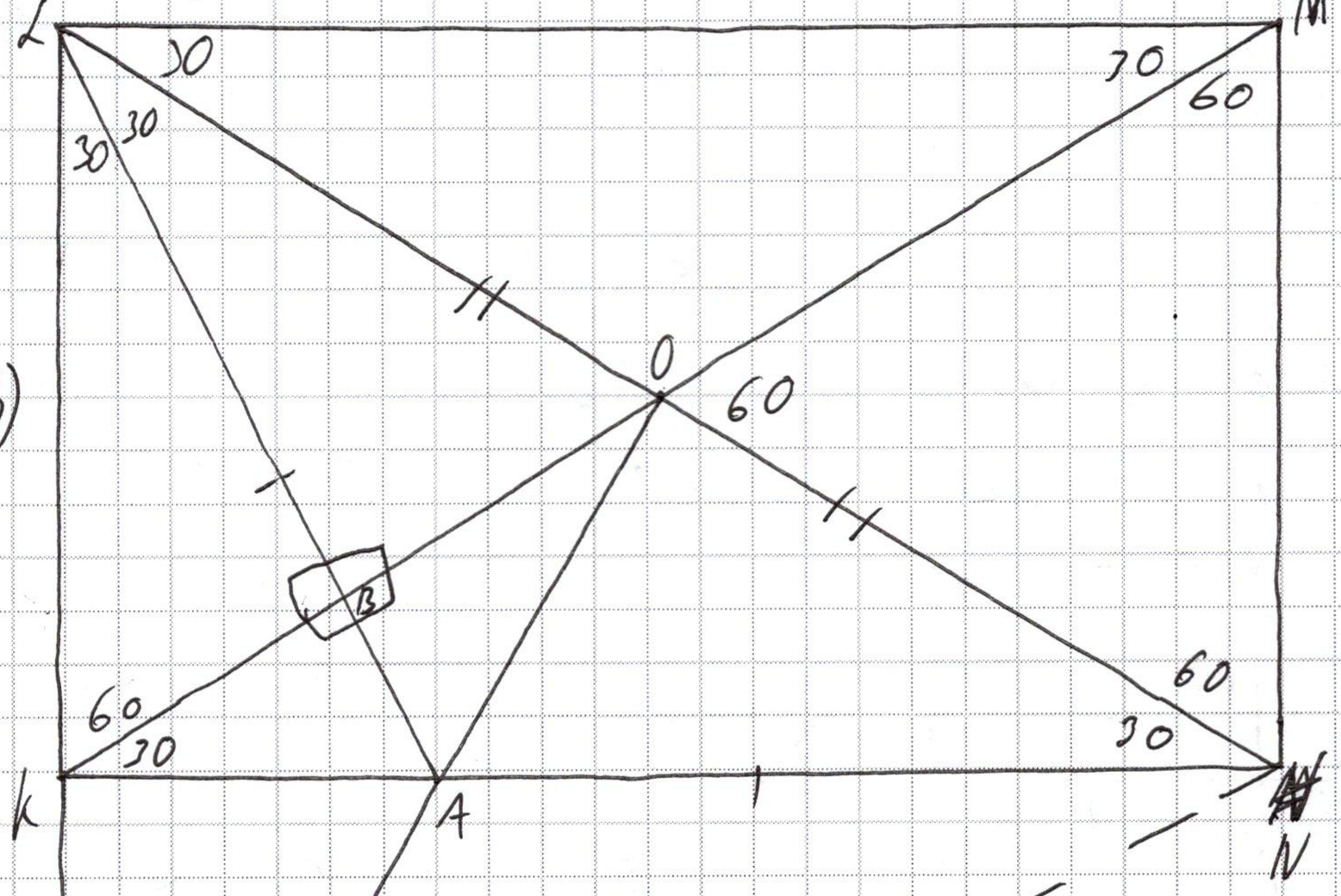
$\angle A \perp KM$ ($\Lambda = \top B$)

$(OA) \cap (LK) = S$

1) $\frac{AK}{AN}$ - ?

2) $\frac{SL}{LA}$

Рисунок:



Решение:

1) Т.к. $KLMN$ - прямоугольник, то по св-ам: $LO = ON = KO = OM$ ($\Rightarrow \triangle KON$ и $\triangle LOM$ - равнобедр.) $\Rightarrow$ пусть $\angle OLM = \angle LMO = \alpha$, тогда

Т.к. $LM \parallel KN$, то $\angle LNK = \alpha \Rightarrow$, т.к. $NA =$ биссектриса $= \angle A$, то $\triangle ALN$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle NLA = \alpha$.

Тогда $\angle KOL + \angle NOL = 90 - \alpha + 180 - 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$

Тогда $AB = \frac{1}{2} AK$, $\angle B = NK - AB = AN - \frac{1}{2} AK$ и по т. Менелая в $\triangle ALN$: $\angle B = NK - 1{,}5\,AK$

$$\frac{NK}{AK} \cdot \frac{AB}{BL} \cdot \frac{LO}{ON} = \frac{NK}{AK} \cdot \frac{\frac{1}{2} AK}{NK - 1{,}5\,AK} = \frac{\frac{1}{2} NK}{NK - 1{,}5\,AK} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow NK = 2NK - 3AK \Rightarrow NK = 3AK \Rightarrow AN = NK - AK = 2AK \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{1}{2}$$

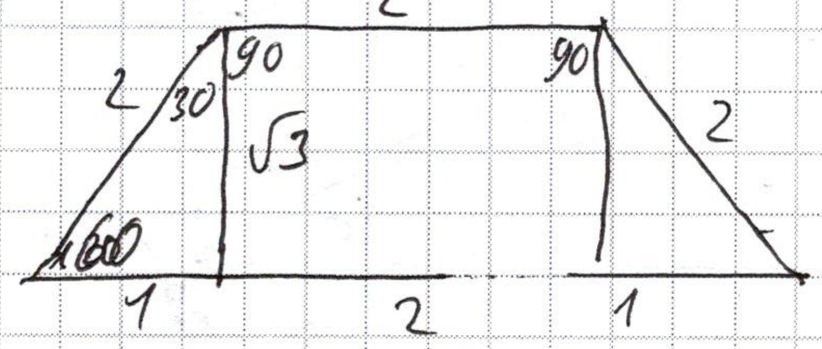
2) $\triangle SLN$, SO - медиана, но NK пересекает её в т. A и, будучи ранее полученного, делится в отношении $2:1 \Rightarrow NK$ - тоже медиана $\Rightarrow LS = 2LK \Rightarrow LK = \frac{1}{2} LS$. Тогда рассмотрим $\triangle KLA$: $\frac{LK}{AL} = \frac{\frac{1}{2} LS}{AL} = \frac{1}{2} \frac{LS}{AL} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

olymp.bmstu.ru

№6

Найдём площади поперечного сечения каждого жёлоба:

1) Для трапеции $S_{max} = 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \frac{2+4}{2} = 3\sqrt{3}$ м^2



2) Для полукруга: $l = 12 = \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \Rightarrow d = \frac{12}{\sqrt{\pi}\sqrt{3}} \Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{6}{\pi\sqrt{3}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{п} = \frac{36\pi}{\pi\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$ м^2

3) Для квадрата:

$S_{к} = \left(\frac{6\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4\sqrt{3}$ м^2

Как мы можем заметить: $S_п = 4S_т$ и $4S_п = 3S_к \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нужно брать как можно больше полукругов.

По условию: не менее 4 трапец. и не менее 1 полукр. - получаем изначально $S = 24\sqrt{3}$, осталось добрать $76\sqrt{3}$, но $76\sqrt{3} \nmid 12\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нужно взять 1 квадратную. Теперь $S = 28\sqrt{3}$, осталось $72\sqrt{3}$, а $72\sqrt{3} : 12\sqrt{3} = 6$. Тогда итоговая стоимость: $4 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 4 =$

$= 20 + 49 + 4 = 73$

Ответ: 73

Нетрудно заметить, что у такого уравнения всегда будет 2 решения (без учёта ОДЗ): $\Rightarrow$ одно ≥ 0, другое ≤ 0

Тогда найдём при ~~каком x~~ какихся a, $x=0$ и $x=-4$:

$a=\sqrt{|-(x+2)|-2} \Rightarrow |-(x+2)|=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -(x+2)=2 \\ x+2=2 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=0 \end{array}\right.$

$a=\sqrt{|-(0+2)|-2}=0 \quad (x=0)$

$a=\sqrt{|-(-4+2)|-2}=0 \quad (x=-4)$

} Из этого следует, что нет таких a, при которых бы x имел лишь одно значение >0 (есть a, при которых единств. знач. x, но оно <0, т.к. $x \neq 4$)

Ответ: ~~$a \in \emptyset$~~ нет таких a.

$$\Rightarrow \frac{\angle S}{\angle A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

Ответ: 1) $\frac{1}{2}$

2) $\sqrt{3}$

№4

Упростим выражение:

$$\left| \frac{x^3 + (x-2)^2 - (x^2-2)x - 12}{\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} - x} \right| = a^2 + 2$$

$$\left| \frac{x^3 + x^2 - 4x + 4 - x^3 + 2x - 12}{4 - x} \right| = a^2 + 2 \quad \Rightarrow x \neq 4$$

$$\left| \frac{x^2 - 2x - 8}{4 - x} \right| = a^2 + 2$$

$$\left| \frac{(x+2)(x+4)}{-(x-4)} \right| = a^2 + 2$$

$$|-(x+2)| = a^2 + 2 \Rightarrow a = \sqrt{|-(x+2)| - 2} \Rightarrow |-(x+2)| \geq 2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} x \leq -2 \\ x \leq -4 \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 0 \end{cases} \right.$$

$\Rightarrow$ x не принимает значения в диапазоне $(-4; 0)$